Exercice 1

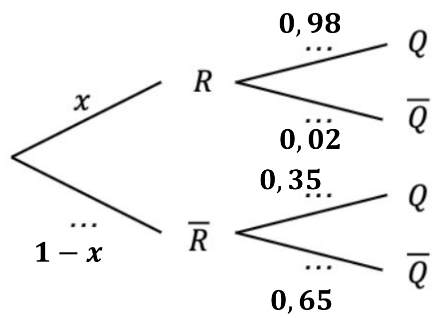
1.

Selon les données de l'énoncée :

$P(Q) = 0{,}917$

$P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65$

2. a.



2. b.

D'après la formule des probabilités totales :

$$0{,}98x + (1 - x) \times 0{,}35 = 0{,}917 \quad \Leftrightarrow x = 0{,}9$$

3.

Utilisons le théorème de Bayes :

$$P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}98}{0{,}917} \approx 0{,}962$$

4.

Nous cherchons la valeur seuil k telle que $P(N \geq k) \geq 0{,}65$.

Cela signifie que nous cherchons la plus petite valeur de k telle que $P(N \leq k - 1) < 0{,}35$.

Nous trouvons que $k = 11$.

Ainsi elle doit attribuer des récompenses à ceux qui ont plus de 11.

5.

$E(S) = E(N_1 + \cdots + N_{10}) = E(N_1) + \cdots + \mathrm{E}(\mathrm{N}_{10}) = 10 \times \mathrm{E}(\mathrm{N}_1) = 10 \times 20 \times 0{,}615 = 123.$

$V(S) = V(N_1 + \cdots + N_{10}) = V(N_1) + \cdots + \mathrm{V}(\mathrm{N}_{10}) = 10 \times V(\mathrm{N}_1) = 10 \times 20 \times 0{,}615 \times (1 - 0{,}615) =$
$47{,}355.$

6.

a. M modélise la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard.

b.

$$E(M) = \frac{E(S)}{10} = \frac{123}{10} = 12{,}3$$

$$V(M) = \frac{V(S)}{10^2} = \frac{47{,}355}{100} = 0{,}47355$$

c.

$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2} = \frac{0{,}47355}{4} = 0{,}118$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

$$P(|M - 12{,}3| < 2) \geq 1 - 0{,}118 = 0{,}882 \geq 0{,}8$$

Donc, la probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants soit comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 88,2 %, ce qui est supérieur à 80 %.

Exercice 2

Partie A : étude d'un modèle discret

1.

Alain ajoute 15 g de chlore par jour. Sachant que 1 m³ = 1000 L et que la piscine contient 50 m³ (soit 50 000 L).

$$\text{Augmentation du taux de chlore} = \frac{15\ 000 \text{ mg}}{50\ 000 \text{ L}} = 0{,}3 \text{ mg/L}$$

Donc, chaque ajout de chlore augmente le taux de chlore de 0,3 mg/L.

2. a.

Pour tout entier naturel n, $P(n)$: « $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ ».

Initialisation :

Pour $n = 0$:

$$v_0 = 0{,}7$$

$$v_1 = 0{,}92 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}644 + 0{,}3 = 0{,}944$$

Donc, $v_0 \leq v_1 \leq 4$.

$P(0)$ est vraie.

Hérédité :

D'après l'hypothèse de récurrence : $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Ainsi : $0{,}92v_n + 0{,}3 \leq 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leq 0{,}92 \times 4 + 0{,}3$ (car $0{,}92 \geq 0$)

Alors $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3{,}98$.

$P(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier n, $P(n)$ est vraie.

b.

La suite (v_n) est strictement croissante (car pour tout entier $n, v_n \leq v_{n+1}$) et majorée par 4. Ainsi la suite (v_n) converge vers une limite l, d'après le théorème de la limite monotone.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = l$$

$$f: x \to 0{,}92x + 0{,}3$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction affine) et pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = f(v_n)$.

Ainsi l est solution de l'équation $l = 0{,}92l + 0{,}3 \iff l = 3{,}75$.

Ainsi (v_n) converge vers 3,75.

3.

La limite du taux de chlore à long terme est de 3,75 mg/L. Comme cette valeur est supérieure à la préconisation de 3 mg/L, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes.

4.

```
def alerte_chlore(s):
    v = 0.7
    n = 0
    while v <= s:
        v = 0.92 * v + 0.3
        n += 1
    return n
```

5.

$v_{16} \approx 2{,}95$ et $v_{17} \approx 3{,}01$.

alerte_chlore(3) renvoie donc 17.

Le taux de chlore ne sera donc plus conforme à partir du 17ième jour.

Partie B : étude d'un modèle continu

1.

C'est une équation différentielle linéaire de première ordre. La solution générale est de la forme :

$y(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{50} \cdot \frac{1}{0{,}08} = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ (avec C une constante réelle).

2. a.

$\lim_{x \to +\infty} -0{,}08x = -\infty$, ainsi par composition $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$.

Alors $\lim_{x \to +\infty} Ce^{-0{,}08x} = 0$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{q}{4}$ (par somme).

b.

On veut $f(0) = 0{,}7$ et que le taux de chlore se stabilise à 2 mg/L :

Pour $f(0) = 0{,}7$:

$$f(0) = C + \frac{q}{4} = 0{,}7$$

Pour que la stabilisation soit à 2 mg/L :

$$\frac{q}{4} = 2$$

$$q = 8$$

En substituant q dans la première équation :

$$C + 2 = 0,7$$

$$C = -1,3$$

Ainsi, les constantes sont $C = -1,3$ et $q = 8$.

Exercice 3

Partie A : exploitation du graphique

1.

$f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 1$.

2.

La courbe semble passer de concave à convexe au point d'abscisse $x = -1{,}2$. Donc, C_f ne semble pas toujours convexe sur son ensemble de définition.

3.

La courbe C_f coupe l'axe des abscisses une seule fois. On conjecture donc qu'il existe une solution unique de $f(x) = 0$ dans cet intervalle. En lisant le graphique de plus près, cette solution semble être environ :

$$\alpha \approx 0{,}1$$

Partie B : étude de la fonction f

1.

$$\lim_{x\to -2^+} x + 2 = 0^+$$

$$\lim_{x\to -2^+} \ln(x+2) = -\infty \text{ (par composition)}$$

Donc $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ (par somme).

Graphiquement, cela indique que la courbe C_f admet une asymptote verticale en $x = 2$.

2.

f est dérivable sur $]2, +\infty[$ ainsi pour tout $x > 2, f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2}$

Mettons cette expression sur le même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) + 2(x+2) + 1}{x+2} = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x+2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$$

Donc,

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$$

3.

Pour étudier les variations de f, nous analysons le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$$

Résolvons $2x^2 + 6x + 5 = 0$:

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4 < 0$$

L'équation n'a pas de racines réelles, donc le numérateur $2x^2 + 6x + 5$ est toujours positif. Comme le dénominateur est toujours positif pour $x > -2$, $f'(x)$ est toujours positif.

Ainsi, f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$.

Tableau de variations de f

x		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4.

Puisque f est strictement croissante sur $]-2, +\infty[$ et continue alors f admet une bijection de $]-2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, il existe une unique solution α sur $]-2, +\infty[$.

On a : $\alpha \approx 0{,}12$.

5.

Comme f est strictement croissante et continue il existe une unique solution α telle que $f(\alpha) = 0$, on a donc

- Pour $x < \alpha$, $f(x) < 0$
- Pour $x > \alpha$, $f(x) > 0$

6.

Pour trouver le point d'inflexion, nous devons analyser le signe de $f''(x)$. Calculons $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x + 6)(x + 2) - (2x^2 + 6x + 5)}{(x + 2)^2}$$

$$\text{Alors } f''(x) = \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x + 2)^2}$$

Pour déterminer le point d'inflexion, on résout $f''(x) = 0$:

$$2x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 64 - 56 = 8$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{8}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'unique solution sur $]-2, +\infty[$ est :

$$x_1 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1.29$$

Partie C : une distance minimale

1.

La distance JM pour $J(0;1)$ et $M(x, \ln(x+2))$ est :

Donc,

$$h(x) = (x-0)^2 + (\ln(x+2) - 1)^2 = x^2 + (\ln(x+2)-1)^2$$

2. a.

Nous savons que $h'(x) = \frac{2f(x)}{(x+2)}$. Nous connaissons les variations de f sur $]-2, +\infty[$. f admet une unique solution α pour $f(\alpha) = 0$, donc $h'(x)$ change de signe en α.

Ainsi pour tout $x \in]2; \alpha]$ $h'(x) \leq 0$ et donc h est décroissante.

Et pour tout $x \in [2; +\infty[$ $h'(x) \geq 0$ et donc h est croissante.

b.

h admet un minimum en $x = \alpha$.

La distance JM^2 est minimale pour $x = \alpha$.

Ainsi la distance JM est minimale en α car la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

3. a.

On a $f(\alpha) = 0$, ainsi $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$

b.

Le coefficient directeur de la tangente C_g en M_α est :

$$g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$$

Le coefficient directeur de (JM_α) est :

$$\frac{g(\alpha)-1}{\alpha}$$

Le produit des coefficients directeurs est :

$$\frac{1}{\alpha+2} \times \frac{\ln(\alpha-2)-1}{\alpha} = \frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha\times(\alpha+2)} = \frac{-\alpha(2+\alpha)}{\alpha\times(\alpha+2)} = -1$$

Exercice 4

Affirmation 1

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires donc (ACD) est un plan.

- Pour $A(2,0,0)$: $8 \times 2 - 5 \times 0 + 4 \times 0 - 16 = 0$
- Pour $C(4,4,1)$: $8 \times 4 - 5 \times 4 + 4 \times 1 - 16 = 0$
- Pour $D(0,0,4)$: $8 \times 0 - 5 \times 0 + 4 \times 4 - 16 = 0$

VRAI

Affirmation 2

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires si et seulement si il existe un couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

FAUX

Affirmation 3

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas colinéaires et A, B, C et H sont coplanaires.

VRAI

Affirmation 4

$\vec{n}(1, -1,2)$ est normal à (ABC).

$\vec{n} = \overrightarrow{HD}$ donc $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal à(ABC).

$H \in (ABC)$, donc H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

VRAI