Exercice 1

Affirmation 1.

La fonction f est définie par $f(x) = 5xe^{-x}$. Pour déterminer s'il y a une asymptote horizontale, nous devons examiner le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5xe^{-x}$$

$$lim_{x\to+\infty} 5xe^{-x} = lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{e^x} = 0$$

Donc, l'axe des abscisses $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f lorsque $x \to +\infty$.

L'affirmation est vraie.

Affirmation 2.

$$f(x) = 5xe^{-x}$$

f est dérivable par produit de fonctions dérivables, donc pour tout x, $f'(x) = 5e^{-x} + 5x(-e^{-x}) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = 5(1-x)e^{-x}$.

$$y' + y = 5e^{-x}$$

Si $y = 5xe^{-x}$:

$$y' = 5(1-x)e^{-x}$$

Donc :

$$y' + y = 5(1-x)e^{-x} + 5xe^{-x} = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$$

La fonction f satisfait donc bien l'équation différentielle.

L'affirmation est vraie.

Affirmation 3.

Si pour tout entier n, $v_n = (-1)^n$ et $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$.

On voit bien ici que la suite (v_n) ne converge pas.

L'affirmation est fausse.

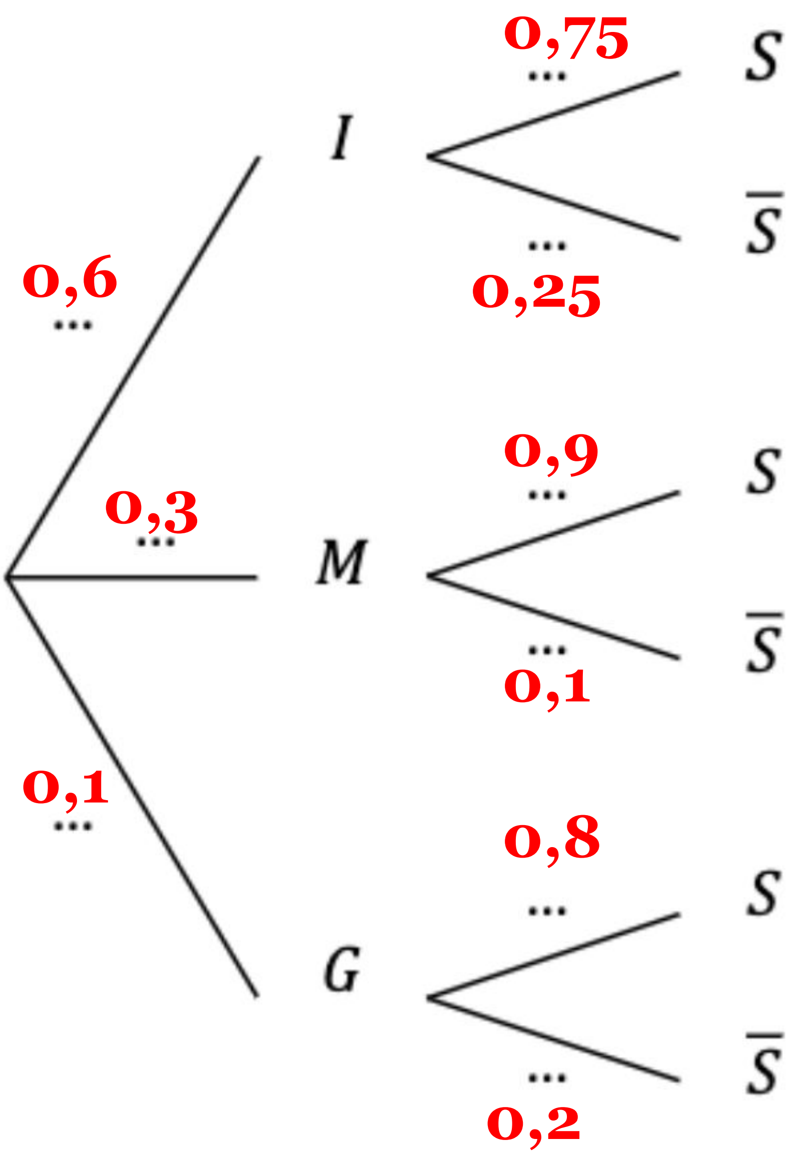
Affirmation 4.

Pour tout entier n, on a alors $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$.
Ainsi pour tout entier n, $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

L'affirmation est vraie.

Exercice 2

1.



2.

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0.60 \times 0.75 = 0.45$$

3.

Utilisons la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(I)P_I(S) + P(M)P_I(M) + P(G)P_I(G)$$

Ainsi : $P(S) = (0{,}75 \times 0{,}60) + (0{,}90 \times 0{,}30) + (0{,}80 \times 0{,}10) = 0{,}45 + 0{,}27 + 0{,}08 = 0{,}80$.

4.

Utilisons la formule de Bayes :

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0.75 \times 0.60}{0.80} = \frac{0.45}{0.80} = 0.5625$$

Arrondie à 10^{-3} près :

$$P_S(I) \approx 0.563$$

5. a.

La variable X représente le nombre de clients satisfaits parmi 30 clients. Chaque client a une probabilité de 0.8 d'être satisfait (comme démontré dans la question 3). Puisque chaque client est choisi indépendamment, X suit une loi binomiale $B(n = 30, p = 0.8)$.

b.

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 1 - 0{,}572 \approx 0{,}428$$

6.

Soit Y une loi binomiale suivant les paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}8$.

Nous cherchons n tel que $P(Y \leq n - 1) \geq 0.99$.

$$P(Y \leq n - 1) = 1 - P(Y = n)$$

$$P(Y = n) = (0{,}8)^n$$

Nous voulons que :

$$1 - (0{,}8)^n \geq 0.99 \implies (0{,}8)^n \leq 0.01$$

Ainsi :

$$\log\left((0{,}8)^n\right) \leq \log(0{,}01) \implies n \log(0{,}8) \leq \log(0{,}01) \implies n \leq \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}8)}$$

$$n \geq \frac{\log(0.01)}{\log(0.8)} \approx 20{,}64 \text{ car} \log(0{,}8) < 0$$

Donc, la taille minimale de l'échantillon est de 21 personnes.

7. a.

Puisque $T = T_1 + T_2$, nous avons :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Pour la variance (variables indépendantes) :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$$

b.

Puisque T est la somme de T_1 et T_2, nous devons vérifier :

$$\begin{aligned} P(5 \leq T \leq 9) &= \mathrm{P}(4 < \mathrm{T} < 10) = P(\,4 - 7 < T - E(T) < 10 - 7) \\ &= P(|T - E(T)| < 3) \end{aligned}$$

$P(|T - E(T)| < 3) \geq\ 1 - P(|T - E(T)| \geq 3) \geq 1 - \frac{V(T)}{3^2} = \frac{2}{3}$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Ainsi : $P(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}$

Exercice 3

1. a.

Pour montrer que $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal au plan (CAD), nous devons vérifier qu'il est orthogonal à deux vecteurs du plan (CAD). Prenons les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Calculons $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 5-0 \\ 0-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -\frac{5}{2}-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{25}{2} \end{pmatrix}$$

Vérifions que $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ en calculant les produits scalaires:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-10) = 5 - 5 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{25}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-\frac{25}{2}) = 0$$

Les deux produits scalaires sont nuls, donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$, ce qui prouve que $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

b.

La forme générale de l'équation d'un plan avec un vecteur normal $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est $ax + by + cz + d = 0$.

Ici, $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$. L'équation devient:

$$1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 \cdot z + d = 0 \implies x - y + d = 0$$

Pour trouver d, utilisons un point du plan, par exemple $C(0,0,10)$:

$$0 - 0 + d = 0 \implies d = 0$$

L'équation du plan (CAD) est donc :

$$x - y = 0$$

2. a.

La droite $\mathcal{D}$ est donnée par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$$

Posons $t = 1$, ainsi on a $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{5}{2}$.

De plus $x - y = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$. Le point appartient donc au plan (CAD). Les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

b.

Pour démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD), nous devons montrer que $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ du plan.

Calculons $\overrightarrow{BH}$:

$$\overrightarrow{BH} = H - B = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} - 0 \\ \dfrac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{n_1}$ est :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \cdot \overrightarrow{n_1}$$

$\overrightarrow{BH}$ est orthogonal au plan (CAD), ainsi H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. a.

Pour montrer que le triangle ABH est rectangle en H, nous devons prouver que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BH}$.

Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH}$:

$$\overrightarrow{AH} = H - A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 5 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH} = H - B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 0 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}$:

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} + (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) + 0 \cdot 0 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

Le produit scalaire est nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux, ce qui signifie que le triangle ABH est rectangle en H.

b.

L'aire du triangle rectangle ABH est $\frac{BH \times AH}{2}$.

Dans le triangle rectangle ABH, la base et la hauteur sont les longueurs des segments $[AH]$ et $[BH]$.

Calculons les longueurs $[AH]$ et $[BH]$:

$$AH = \| \overrightarrow{AH} \| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$BH = \| \overrightarrow{BH} \| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

L'aire du triangle ABH est donc :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times AH \times BH = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{25 \times 2}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{4} = \frac{25}{4}$$

4. a.

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$

$\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires.

Et $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ainsi O appartient au plan (BAH).

Ainsi, (CO) est perpendiculaire au plan (ABH) et représente bien la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

b.

Le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur relative à cette base. La base est le triangle ABH avec une aire de $\frac{25}{4}$ et la hauteur est 10.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{1}{3} \times \frac{250}{4} = \frac{250}{12} = \frac{125}{6}$$

Question 5

$$BC = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

L'aire du triangle ABC est $\mathcal{B} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$.

$$V = \frac{125}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times d = \frac{125}{6} \Leftrightarrow d = \sqrt{5}$$

Exercice 4 :

Partie A : Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln\, x$$

1. a.

Limite de $f(x)$ en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - 2 + \frac{1}{2}\ln\, x\right)$$

- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, par somme.

- Limite de $f(x)$ en $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x - 2 + \frac{1}{2}\ln\, x\right)$$

- $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, par somme.

b.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

La dérivée de f est :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2x}$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2x}$$

c.

Pour $x > 0$:$f'(x) = \frac{2x+1}{2x} > 0$Puisque $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

d.

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ par somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

Pour $x > 0$, $f''(x) < 0$. Donc, f est concave sur $]0,+\infty[$.

2.a.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Ainsi f admet une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe une unique solution α telle que $f(\alpha) = 0$.

- $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = -1$
- $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.346$

Puisque f est continue et strictement croissante, et que $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, par le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in [1,2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b.

Pour $x \in]0,\alpha[$, $f(x) < 0$ (car f est croissante et $f(1) < 0$).

- Pour $x = \alpha$, $f(x) = 0$.
- Pour $x \in]\alpha,+\infty[$, $f(x) > 0$.

c.

Puisque $f(\alpha) = 0$:

$$\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln \alpha = 0 \implies \frac{1}{2}\ln \alpha = 2 - \alpha \implies \ln \alpha = 2(2 - \alpha)$$

Partie B : Étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0,1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$$

1.

g est dérivable sur $]0,1]$ par somme de fonctions dérivables sur $]0,1]$.

Ainsi :

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x\ln x + x)$$

$$= x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Ainsi $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

2. a.

Pour $x \in]0, \frac{1}{\alpha}[$, $\frac{1}{x} \in]\alpha, +\infty[$.

- On a déjà vu que $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$, donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ pour $x \in]0, \frac{1}{\alpha}[$.

b.

Pour $x \in]0, \frac{1}{\alpha}[$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, donc g est croissante sur $]0, \frac{1}{\alpha}[$.

Pour $x \in]\frac{1}{\alpha}, 1]$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) < 0$, donc g est décroissante sur $]\frac{1}{\alpha}, 1]$.

Partie C : Un calcul d'aire

1. a.

Pour $x \in]0,1]$, nous devons comparer $g(x)$ et $-\frac{7}{8}x^2 + x$.

- La différence est :

$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x \geq 0$ car $x \in]0; 1]$.

La courbe C_g est au-dessus de la parabole P.

b.

Par une intégration par parties avec $u = \ln\ x$ et $v' = x^2$.

- $u' = \frac{1}{x}$
- $v = \frac{x^3}{3}$

u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues sur $\left[\frac{1}{\alpha}; 1\right]$.

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln\ x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left(\frac{1^3}{3}\ln\ 1 - \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3}\ln\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\ dx$$

$$= \frac{13 - 6\alpha - \alpha^3}{9\alpha^3}$$

2.

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left(-\frac{1}{4}x^2\ln\ x\right)\ dx$$

Avec le résultat précédent pour l'intégrale :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln\ x\ dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}$$

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré est :

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}$$